

Lista di simboli logici e di insiemistica

$\in$ appartiene	$\Rightarrow$ implicazione logica	$\forall$ ogni / per ogni	$A \cup B$ unione tra insiemi
$\notin$ non appartiene	$\Leftarrow$ implicazione inversa	$\exists$ esiste	$A \cap B$ intersezione tra insiemi
$\subseteq$ inclusione tra insiemi	$\nRightarrow$ implicazione negata	$\exists!$ esiste ed è unico	$A \setminus B$ differenza tra insiemi
$\subsetneq$ inclusione stretta	$\nLeftarrow$ implicazione inversa negata	$\mid o : \text{tale che}$	$A \times B$ prodotto cartesiano
$\not\subseteq$ negazione dell'inclusione	$\Leftrightarrow$ equivalenza logica	$\vee$ o / oppure	$C_X(A)$ complementare di A in X
$\emptyset$ insieme vuoto	$\neg$ negazione logica	$\wedge$ e	

Nella scorsa lezione abbiamo introdotto:

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

$$\mathbb{Z} = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots \}$$

In $\mathbb{Z}$ si possono fare addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni con resto.

In generale però, il rapporto tra due numeri interi non è un numero intero. Per questo introduciamo il prossimo insieme numerico

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

NUMERI RAZIONALI

ESEMPLI

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{142}{5}, \quad \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}, \quad \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{100}{200}$$

ogni frazione si può rappresentare in infiniti modi diversi.

oss Se $q \in \mathbb{Q} \exists! a, b \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } q = \frac{a}{b} \text{ e } \text{mcd}(a, b) = 1 \text{ e } b > 0.$

(cioè ogni numero razionale si scrive in modo unico come frazione ridotta ai minimi termini con denominatore positivo)

Operazioni tra frazioni

• ADDIZIONE:
E SOTTRAZIONE

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

• MOLTIPLICAZIONE:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

• DIVISIONE:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Attenzione Evitate scritture del tipo: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ o $\frac{a/b}{c/d}$

Si rischia di confondere $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ con $\frac{\frac{a}{c}}{b}$.

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

ESEMPIO:

$$\frac{2}{\frac{3}{4}} = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2^1}{3} \cdot \frac{1}{4_2} = \frac{1}{6}$$

oss Se $m \neq 0$ è un multiplo comune di b e d (ad esempio: $m = \text{mcm}(b, d)$) allora

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot \frac{m}{b} + c \cdot \frac{m}{d}}{m}$$

Come caso particolare ($m = b$):

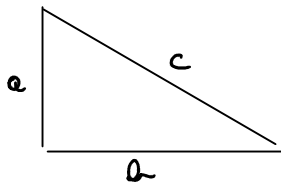
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

Attenzione In generale:

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \quad \left(\begin{array}{l} \text{le frazioni non} \\ \text{si spazzano al} \\ \text{denominatore} \end{array} \right)$$

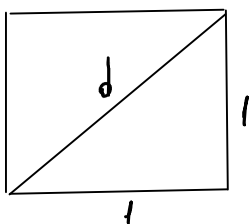
In $\mathbb{Q}$ si possono fare addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni. Però non sempre si possono calcolare le radici quadrate. Il problema è nato con il Teorema di Pitagora:

Triangolo rettangolo



$$c^2 = a^2 + b^2$$

(Teorema di Pitagora)



$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$d^2 = 2.$$

TEOREMA $\nexists q \in \mathbb{Q}$ t.c. $q^2 = 2$

DIM Dimostrazione per assurdo.

Per assurdo supponiamo che $\exists q \in \mathbb{Q}$ t.c. $q^2 = 2$.

Allora $\exists!$ $a, b \in \mathbb{Z}$ t.c. $q = \frac{a}{b}$ e $\text{mcd}(a, b) = 1$
e $b > 0$.

$$q^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 2b^2 \quad (*)$$

$$\Rightarrow a^2 \text{ e' pari.}$$

$$\Rightarrow a \text{ e' pari.}$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } a = 2k. \quad (*)$$

$$a^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2$$

$$\Rightarrow 2k^2 = b^2$$

$$\Rightarrow b^2 \text{ e' pari}$$

$$\Rightarrow b \text{ e' pari.}$$

a e b sono entrambi pari, ma $\text{mcd}(a, b) = 1$,
quindi abbiamo ottenuto una contraddizione. ■

I numeri razionali si possono rappresentare
in forma decimale.

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{1}{5} = 0,2$$

$$\frac{1}{3} = 0,3333333 \dots = 0,\overline{3}$$

(infiniti 3 dopo
la virgola)

$$\frac{113}{50} = 2,26$$

$\begin{array}{r} 113 \\ 100 \\ \hline 130 \\ 100 \\ \hline 300 \\ 300 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 50 \\ \hline 2,26 \end{array}$
---	--

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$$

$\begin{array}{r} 1 \\ 0 \\ \hline 10 \\ 9 \\ \hline 10 \\ 9 \\ \hline 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 0,333333 \dots \end{array}$
---	---

Teorema Ogni numero razionale ha una rapp. decimale finita o periodica.

$$1, \overline{7} \in \mathbb{Q}$$

$$2,3\overline{21} = 2,321212121 \dots \in \mathbb{Q}.$$

Ma ci sono altri numeri.

$$0,01001000100001\dots \notin \mathbb{Q}.$$

Altri esempi famosi di numeri non razionali

$$\pi = 3,141592\dots$$

$$e = 2,71\dots$$

$$\sqrt{2} = 1,4142\dots$$

$$\sqrt{3} = 1,7\dots$$

Numeri Reali

$$\mathbb{R} = \{ \pm m, a_1 a_2 a_3 \dots \mid m \in \mathbb{N}, a_1, a_2, a_3 \dots \in S \}$$

$$S = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

OSS

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \text{ e}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \underbrace{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}$$

NUMERI IRRAZIONALI,

In $\mathbb{R}$ possiamo fare tutte le operazioni elementari, in particolare addizione (+) e moltiplicazione ($\cdot$).

PROP DI +

$$1) \forall a, b \in \mathbb{R}: a + b = b + a \quad (\text{PROPRIETÀ COMMUTATIVA})$$

$$2) \forall a, b, c \in \mathbb{R}: (a + b) + c = a + (b + c) \\ (\text{ci può servire } a + b + c) \quad (\text{PROPRIETÀ ASSOCIATIVA})$$

$$3) \forall a \in \mathbb{R}: a + 0 = a. \quad (0 \text{ È ELEMENTO NEUTRO PER } +)$$

$$4) \forall a \in \mathbb{R} \quad -a \text{ è l'unico num. reale} \\ \text{tale che } a + (-a) = 0 = -a + a. \quad (\text{ESISTENZA E UNICITÀ DELL'OPPOSTO})$$

PROPRIETÀ DI $\cdot$

$$1) \forall a, b \in \mathbb{R}: a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{spesso ind. con } ab) \\ (\text{PROPRIETÀ COMMUTATIVA DI } \cdot)$$

$$2) \forall a, b, c \in \mathbb{R}: (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ (= a \cdot b \cdot c) \quad (\text{PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DI } \cdot)$$

$$3) \forall a \in \mathbb{R}: a \cdot 1 = a \quad (1 \text{ È ELEMENTO NEUTRO PER } \cdot)$$

4) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{1}{a}$ è l'unico numero reale
t.c. $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. (ESISTENZA E UNICITÀ DEL RECIPROCO)

5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$
(PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA)

Per convenzione $\cdot$ ha una priorità maggiore rispetto a $+$

$$(a \cdot c) + (b \cdot c) = a \cdot c + b \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$
$$\neq a + b \cdot c$$

Altre operazioni:

SOTTRAZIONE: $a - b := a + \underbrace{(-b)}_{\text{definizione}}$

DIVISIONE: $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b} \quad (\text{se } b \neq 0)$.

Conseguenze:

1) Moltiplicazione per zero:

$$\forall a \in \mathbb{R}: a \cdot 0 = 0$$

2) Legge di annullamento del prodotto:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

3) Legge di cancellazione:

$$\bullet \forall a, b, c \in \mathbb{R}: a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$$
$$(a + x = b + x \Leftrightarrow a = b)$$

$\bullet \forall a, b, c \in \mathbb{R}$, con $c \neq 0$:

$$a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$$

4) Principi di identità

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a + c = b \Leftrightarrow a = b - c$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \text{ con } c \neq 0: a \cdot c = b \Leftrightarrow a = \frac{b}{c}$$

Attenzione alle cancellazioni:

$$\begin{array}{l} x + \cancel{b} = s + \cancel{b} \\ x = s \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + \cancel{b} = \cancel{b} \\ x = 0 \end{array}$$

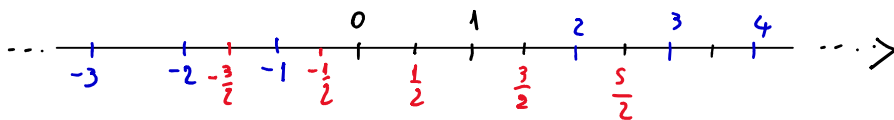
$$\begin{array}{l} \cancel{z} \cdot x = \cancel{z} \\ x = 1 \end{array}$$

$$x + \cancel{b} = 0 + \cancel{b}$$

$$\begin{array}{l} \cancel{z} \cdot x = \cancel{z} \cdot 1 \\ x = 1 \end{array}$$

Ordinamento in $\mathbb{R}$.

I numeri reali si possono rappresentare su una retta



$a < b$ significa che b sta alla destra di a sulla retta reale

$a > b$ significa che b sta alla sinistra di a sulla retta reale

$a \leq b$ significa $a < b \vee a = b$

$a \geq b$ significa $a > b \vee a = b$

PROPRIETÀ DELL' ORDINAMENTO:

$$1) \forall a \in \mathbb{R} : a \leq a \quad (\text{RIFLESSIVA})$$

$$2) \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \wedge b \leq a \Leftrightarrow a = b \quad (\text{ANTISIMMETRICA})$$

$$3) \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c \quad (\text{TRANSITIVA})$$

$$4) \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \vee a \geq b, \quad (\text{TOTALE})$$

$$(a < b \vee a = b \vee a > b)$$

$$5) \forall a, b, c \in \mathbb{R} :$$

$a \leq b$	$\Leftrightarrow$	$a + c \leq b + c$
$a \geq b$		$a + c \geq b + c$
$a > b$		$a + c > b + c$
$a < b$		$a + c < b + c$

$$6) \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ con } c > 0 :$$

$a \leq b$	$\Leftrightarrow$	$ac \leq bc$
$a \geq b$	$\Leftrightarrow$	$ac \geq bc$
$a > b$	$\Leftrightarrow$	$ac > bc$
$a < b$	$\Leftrightarrow$	$ac < bc$

$$7) \forall a, b, c \in \mathbb{R} \text{ con } c < 0 :$$

$a \leq b$	$\Leftrightarrow$	$ac \geq bc$
$a \geq b$	$\Leftrightarrow$	$ac \leq bc$
$a > b$	$\Leftrightarrow$	$ac < bc$
$a < b$	$\Leftrightarrow$	$ac > bc$

8) Segni dei prodotti:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} :$$

$a > 0$	$, b > 0$	$\Rightarrow a \cdot b > 0$
$a < 0$	$, b < 0$	$\Rightarrow a \cdot b > 0$
$a < 0$	$, b > 0$	$\Rightarrow a \cdot b < 0$
$a > 0$	$, b < 0$	$\Rightarrow a \cdot b < 0$

$$9) \forall a \in \mathbb{R} : a^2 := a \cdot a \geq 0 \quad \text{e} \quad (a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0)$$

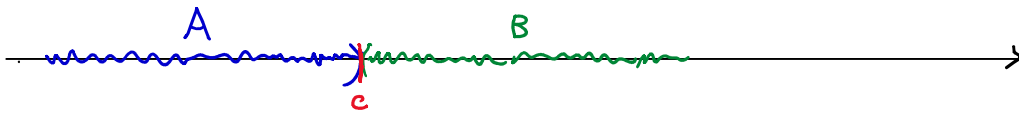
Proprietà di completezza di $\mathbb{R}$ (di Dedekind).

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti e tali che

$\forall a \in A, b \in B : a \leq b$. Allora $\exists c \in \mathbb{R}$.

tale che $\forall a \in A : a \leq c$

$\forall b \in B : c \leq b$.



Polinomi, equazioni e disequazioni:

Queste prop. di $\mathbb{R}$ si usano per risolvere equazioni e disequazioni.

Def: Se $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Denotiamo con x^n il prodotto $x \cdot x \cdot x \dots \cdot x$ (n volte).

Se $x \neq 0$, allora poniamo $x^0 = 1$.

PROPRIETÀ

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

$$(2^{10})^3 \cdot 4 = 2^{30} \cdot 2^2 = 2^{32}$$

Def: Un **POLINOMIO** di variabile x e coefficienti reali è una scrittura del tipo:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

dove $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Se $a_n \neq 0$, si dice che $p(x)$ ha **GRADO** n
($\deg p = n$)

$$x^2 - x + 3 \quad \text{pal. di grado 2}$$

$$x + 1 - x^{12} + x^7 \quad \text{pal. di grado 12}$$

$$\pi x + \sqrt{3} x^4 \quad \text{pal. di grado 4.}$$

I polinomi si possono moltiplicare e sommare tra loro usando le stesse regole che usiamo per i numeri.

$$x(x+2) = (x^2 + x - 1)$$

$$= \cancel{x^2} + 2x - \cancel{x^2} - x + 1$$

$$= x + 1 \quad \text{è un pal. di grado 1.}$$

Se $p(x)$ è un polinomio e $K \in \mathbb{R}$, indichiamo con $p(K)$ il numero ottenuto sostituendo K ad x .

$$p(x) = x^3 - x + 1$$

$$p(2) = 8 - 2 + 1 = 7$$

$$p(-2) = -8 + 2 + 1 = -5$$

$$p(0) = 1$$

Def: Si dicono **RADICI (REALI)** di $p(x)$ i numeri reali K tali che $p(K) = 0$.

Un'espressione del tipo $p(x) = 0$ con p polinomio si dice un' **EQUAZIONE POLINOMIALE**

Espressioni del tipo

$p(x) \geq 0$ / $p(x) \leq 0$ / $p(x) > 0$ / $p(x) < 0$ si dicono

DISUGUAGLIAMENTI POLINOMIALI.

Attenzione ad usare correttamente i termini:

- $p(x)$ polinomio
- $p(x) = 0$ equazioni polinomiali
- radici di $p(x)$: numeri k t.c. $p(k) = 0$.

Le radici di $p(x)$ si dicono anche **SOLUZIONI**
DELL' EQUAZIONE $p(x) = 0$.

Domande:

Come si risolve $p(x) = 0$?

Come si risolve $p(x) \geq 0$?

La difficoltà dipende dal grado di $p(x)$.

• **Grado 1:** $p(x) = ax + b$ con $a \neq 0$.

Equazioni:

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \iff ax = -b \\ &\iff x = -\frac{b}{a} \quad (a \neq 0). \end{aligned}$$

unica soluzione.

I polinomi di grado 1 hanno sempre un'unica radice.

Disuguagliazioni

$$ax + b \geq 0 \quad ?$$

$$ax \geq -b$$

Due casi:

Se $a > 0$:

$$ax \geq -b$$

$$x \geq -\frac{b}{a}$$

ESEMPIO

$$1 - 2x \geq 4$$

$$-2x \geq 3$$

$$x \leq -\frac{3}{2}$$

$a < 0$

$$ax \geq -b$$

$$x \leq -\frac{b}{a}$$

Metodo alternativo:

$$1 - 2x \geq 4$$

$$1 - 4 \geq 2x$$

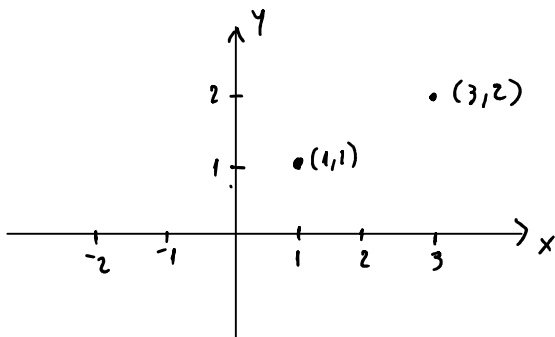
$$-3 \geq 2x$$

$$-\frac{3}{2} \geq x$$

$$x \leq -\frac{3}{2}$$

Interpretazione grafica

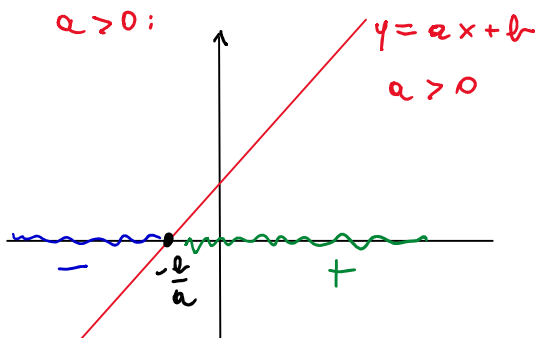
$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$



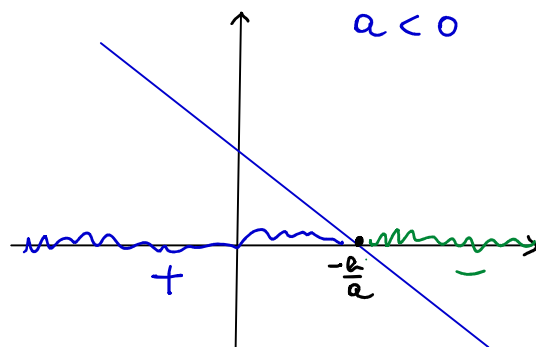
PIANO CARTESIANO

In $\mathbb{R}^2$ un'equazione del tipo $y = ax + b$ rappresenta una retta la cui pendenza dipende da a .

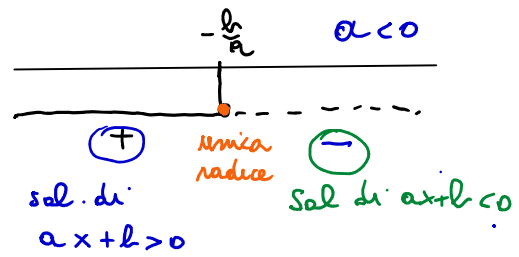
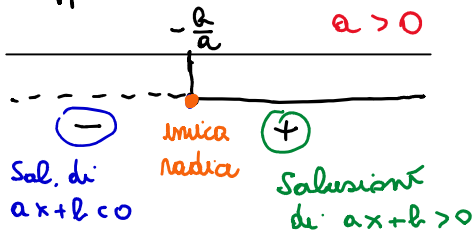
$a > 0$:



$a < 0$

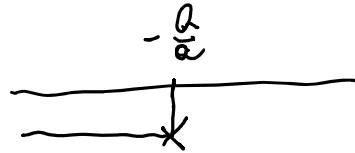


Rappresentazione del segno :

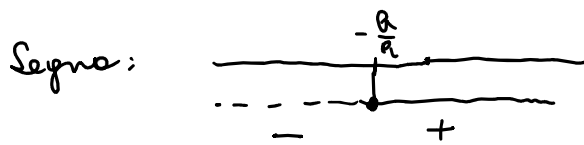


Se $a > 0$:

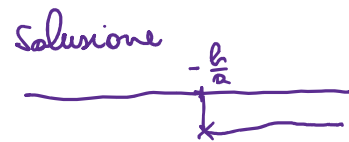
Risolvere $ax + b < 0$
 $x < -\frac{b}{a}$



sol di $ax+b < 0$.



Se $a < 0$: $ax + b < 0$
 $x > -\frac{b}{a}$



Segno di $ax + b$:

